

ANALYSE MULTICRITÈRE POUR L'AIDE À LA DÉCISION

ANTOINE ROLLAND , Université LYON II

18^{emes} journées GDR MACS
St-Etienne, 11 octobre 2013

BIBLIOGRAPHIE

Quelques ouvrages en français pour une première approche

- Ph Vincke, *L'Aide Multicritère à la Décision*, Editions de 'Université de Bruxelles - Editions Ellipses ", 1989
- B. Roy et D. Bouyssou, *Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et Cas*, Economica 1993
- D. Bouyssou, D. Dubois, M. Pirlot, H. Prade, *Concepts et méthodes pour l'aide à la décision*, 3 volumes, Hermès 2006
- M. Grabisch and P. Perny. *Agrégation multicritère*. In Logique floue, principes, aide à la décision, B. Bouchon-Meunier, C. Marsala (eds), Hermès, 2003

PRENDRE UNE DÉCISION EST DIFFICILE QUAND...

- il y a trop de possibilités à comparer → **Optimisation combinatoire**
- il y a plusieurs décideurs → **Théorie du Choix Social**
- les conséquences des actes ne sont pas sûres → **Décision dans l'incertain**
- plusieurs critères rentrent en compte → **aide multicritère à la décision**

CADRE FORMEL

Choix social	Multicritère	Incertain
Candidats	Alternatives	Actions
Votants	Critères	Etats de la nature
Rangs	Valeurs	Conséquences
(Nombre)	(Poids)	(Probabilités)

- Choix social : préférences individuelles → préférences globales
- Multicritère : préférences sur les critères → préférences sur les alternatives
- Incertain : préférences sur les conséquences → préférences sur les actions

NOTATIONS

- \mathcal{X} est l'ensemble des alternatives x, y, \dots
- $\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}$ est l'ensemble des critères
- $g_i : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}, i \in \mathcal{N}$ sont les fonctions critères
- $g_i(x)$ est la valeur prise par l'alternative x sur le critère i , notée aussi x_i

CHOISIR UN APPAREIL PHOTO

critère	appareil 1	appareil 2	appareil 3
Nb Pixel	20m	12m	16m
sensibilité	125-6400	80-12800	100-12800
vitesse	30s-1/2000	15s-1/4000	30s-1/4000
Macro	10cm	15cm	X
Prix	490 €	450 €	1200 €

- fonctions d'agrégation additives
 - moyenne pondérée
- fonctions d'agrégation non additives
 - maximin, minimax, minimin maximax
 - OWA
 - intégrale de Choquet
- distances
 - optimisation multiobjectif

HYPOTHÈSES

- les valeurs sur les différents critères sont **commensurables**
- les valeurs sur les différents critères peuvent se **compenser**
- les valeurs de toutes les alternatives sur tous les critères sont **parfaitement connues**
- on veut obtenir une relation de préférence **complète** et **transitive**

CHOISIR UN APPAREIL PHOTO

critère	appareil 1	appareil 2	appareil 3
Nb Pixel	10	6	8
sensibilité	3	10	9
vitesse	5	5	10
Prix	9	10	4

FONCTION D'AGRÉGATION ADDITIVES

MOYENNE PONDÉRÉE

$$x \succsim y \iff WS(x) \geq WS(y)$$

$$WS(x) = \sum_i w_i f_i(x)$$

- facile à comprendre et à utiliser
- mais ne favorise pas les solutions de compromis (ex : A(18,3) ; B(3,18), C(10,10))

FONCTION D'AGRÉGATION ADDITIVES

MOYENNE PONDÉRÉE

$$x \succsim y \iff WS(x) \geq WS(y)$$

$$WS(x) = \sum_i w_i f_i(x)$$

critère	coef	appareil 1	appareil 2	appareil 3
Nb Pixel	0.2	10	6	8
sensibilité	0.3	3	10	9
vitesse	0.1	5	5	10
Prix	0.4	9	10	4
Score		7	8.7	6.9

FONCTIONS D'AGRÉGATION NON ADDITIVES (1)

MAX ET MIN

- maximin (pessimiste prudent)

$$x \succsim y \iff \min_i (f_i(x)) \geq \min_i (f_i(y))$$

- maximax (optimiste joueur)

$$x \succsim y \iff \max_i (f_i(x)) \geq \max_i (f_i(y))$$

- etc...

critère	appareil 1	appareil 2	appareil 3
Nb Pixel	10	6	8
sensibilité	3	10	9
vitesse	5	5	10
Prix	9	10	4
Min	3	6	4
Max	9	10	10

FONCTIONS D'AGRÉGATION NON ADDITIVES (2)

OWA [YAGER98]

$$x \succsim y \iff OWA(x) \geq OWA(y)$$

$$OWA(x) = \sum_i w_i f_{\sigma(i)}(x)$$

avec $f_{\sigma(1)}(x) \geq f_{\sigma(2)}(x) \geq \dots \geq f_{\sigma(3)}(x)$

- les poids sont affectés aux rangs des valeurs et non aux critères
- permet de retrouver (et composer) tous les indices statistiques de position

FONCTIONS D'AGRÉGATION NON ADDITIVES (2)

OWA [YAGER98]

$$x \succsim y \iff OWA(x) \geq OWA(y)$$

$$OWA(x) = \sum_i w_i f_{\sigma(i)}(x)$$

avec $f_{\sigma(1)}(x) \geq f_{\sigma(2)}(x) \geq \dots \geq f_{\sigma(3)}(x)$

critère	appareil 1	appareil 2	appareil 3
Nb Pixel	10	6	8
sensibilité	3	10	9
vitesse	5	5	10
Prix	9	10	4
OWA	6.2	7.3	7.4

Avec le jeu de poids (0.3 ; 0.3 ; 0.2 ; 0.2)

FONCTIONS D'AGRÉGATION NON ADDITIVES (3)

INTÉGRALE DE CHOQUET [CHOQUET53]

$$x \succsim y \iff C(x) \geq C(y)$$

$$C(x) = \sum_i \mu(A_i) (f_{\sigma(i)}(x) - f_{\sigma(i+1)}(x))$$

avec $f_{\sigma(1)}(x) \geq f_{\sigma(2)}(x) \geq \dots \geq f_{\sigma(3)}(x)$

μ une mesure sur 2^N et $A_i = \{1, \dots, i\}$.

- intégrale vis-à-vis d'une mesure non additive (capacité ou mesure floue)
- permet de modéliser les interactions entre critères
- inclue WS, OWA, etc...

FONCTIONS D'AGRÉGATION NON ADDITIVES (3)

Exemple de capacité (4 critères=16 paramètres) :

$$\begin{array}{llll}
 \mu(\{c_1\}) = 0.2 & \mu(\{c_2\}) = 0.1 & \mu(\{c_3\}) = 0.2 & \mu(\{c_4\}) = 0.1 \\
 \mu(\{c_1, c_2\}) = 0.3 & \mu(\{c_1, c_3\}) = 0.6 & \mu(\{c_1, c_4\}) = 0.2 & \mu(\{c_2, c_3\}) = \mathbf{0.6} \\
 \mu(\{c_2, c_4\}) = \mathbf{0.2} & \mu(\{c_3, c_4\}) = 0.3 & \mu(\{c_1, c_2, c_3\}) = 0.7 & \mu(\{c_1, c_2, c_4\}) = 0.4 \\
 \mu(\{c_1, c_3, c_4\}) = 0.5 & \mu(\{c_2, c_3, c_4\}) = 0.4 & \mu(\{c_1, c_2, c_3, c_4\}) = 1 & \mu(\emptyset) = 0
 \end{array}$$

critère	appareil 1	appareil 2	appareil 3
Nb Pixel	10	6	8
sensibilité	3	10	9
vitesse	5	5	10
Prix	9	10	4
Choquet Int.	5	6.2	7.6

OPTIMISATION MULTICRITÈRE

PRINCIPE

$$x \succsim y \iff d(x, z) \leq d(y, z)$$

où $d(,)$ est une distance et z un point idéal

Exemple : méthode TOPSIS [Hwang& Yoon81]

- calcul du point idéal et du point anti-idéal
- calcul de la distance d au point idéal
- calcul de la distance d' au point anti-idéal
- calcul du score : $s = \frac{d'}{d+d'}$

OPTIMISATION MULTICRITÈRE

PRINCIPE

$$x \succsim y \iff d(x, z) \leq d(y, z)$$

où $d(,)$ est une distance et z un point idéal

critère	appareil 1	appareil 2	appareil 3	Ideal	Anti-Ideal
Nb Pixel	10	6	8	10	6
sensibilité	3	10	9	10	3
vitesse	5	5	10	10	5
Prix	9	10	4	10	4

Méthodes à base de surclassement

BIBLIOGRAPHIE

- B. Roy et D. Bouyssou, *Aide Multicritère à la Décision : Méthodes et Cas*, Economica 1993
- D. Bouyssou, D. Dubois, M. Pirlot, H. Prade, *Concepts et méthodes pour l'aide à la décision*, volume 3, Hermès 2006

HYPOTHÈSES

- acte de décision = processus d'élaboration progressive d'une structure de préférence
- l'acceptation de l'idée d'incomparabilité des actions
- avoir comme résultat une structure de préférence beaucoup moins stricte qu'un pré-ordre total en vue d'éclairer le DM sur son choix

RELATION DE SURCLASSEMENT

PRINCIPE

$$x \succsim y \iff C(x, y) \supseteq_N C(y, x)$$

avec $C(x, y) = \{i \in N \mid x_i \succsim_i y_i\}$

LA MÉTHODE ELECTRE [ROY68]

RELATION DE SURCLASSEMENT

x surclasse y (xSy) si $C(x, y) > SC$ et $\forall j \in N$, non $y_j V_j x_j$

- xSy et non ySx : x est préféré à y (xPy ou $x \succ y$)
- xSy et ySx : x et y sont indifférents (xIy ou $x \sim y$)
- non xSy et non ySx : x et y sont incomparables (xRy)

La relation S donne un graphe des préférences sur X

Alors que fait-on ?

- Electre **analyse** une situation mais ne **résout pas** tous les problèmes !
- on peut **réduire** le graphe en fusionnant les cycles en une nouvelle alternative
- on peut **faire varier** les seuils pour une analyse de sensibilité

LA MÉTHODE ELECTRE [ROY68]

critère	appareil 1	appareil 2	appareil 3
Nb Pixel	20m	12m	16m
sensibilité	125-6400	80-12800	100-12800
vitesse	30s-1/2000	15s-1/4000	30s-1/4000
Macro	10cm	15cm	X
Prix	490 €	450 €	1200 €

critère	appareil 1	appareil 2	appareil 3
appareil 1		0.4	0.4
appareil 2	0.6		0.4
appareil 3	0.4	0.4	

avec $w_1 = w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = 0.2$

AUTRE EXEMPLE : PROMETHEE [BRANSE ET AL 84]

- comparer les alternatives avec intensité de préférence
 $P_i(x, y) = p(g_i(x) - g_i(y))$
 - $P(x, y) = 0 \Rightarrow$ pas de préférence de x sur y
 - $P(x, y) = 1 \Rightarrow$ préférence forte de x sur y
- indicateur de préférence $\pi(a, b) = \sum_i \omega_i P_i(a, b)$ and $\pi(b, a)$
- calcul des flux $\Phi^+(x) = \sum_y \pi(x, y)$ and $\Phi^-(x) = \sum_y \pi(y, x)$
- agrégation des flux

- règles de décisions
- AHP

RÈGLES DE DÉCISIONS [SLOWINSKY ET AL 01]

- problématique du tri
- utilise la dominance et les "Rough sets"
- convient bien aux données imprécises ou incomplètes
- très compréhensible par un décideur

PRINCIPE

Si x domine y alors x doit être classé dans une catégorie au moins aussi bonne que celle de y .

AHP

[SAATY71, SAATY80]

- méthode pour déterminer les poids d'une somme pondérée
- utilise les comparaisons d'alternatives et de critères
- peut prendre en compte plusieurs décideurs.

PRINCIPE

- Décomposer le problème complexe en une structure hiérarchique (niveaux)
- Effectuer les comparaisons entre critères : de 1 (indifférence) à 9 (extrême préférence)
- Effectuer les comparaisons entre alternatives
- Synthétiser les comparaisons (moyenne) pour obtenir un classement
- Cohérence des jugements

CE QU'IL FAUT RETENIR

- pas de méthode miracle !
- mais des propriétés souhaitables... ou non

CE QU'IL FAUT RETENIR

- pas de méthode miracle !
- mais des propriétés souhaitables... ou non

LES DÉFIS

- l'analyse axiomatique
- le passage à l'échelle
- l'élicitation des paramètres (preference learning)